www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
ET DU LOGEMENT

E.I.T.P.E 1989

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

- option M -

(temps accordé : 4 heures)

Notations : $\mathbb{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$.

T_n est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}_n[X]$, de degré n et unitaires, c'est à dire dont le coefficient de X^n est égal à 1.

Dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes, U est l'ensemble des complexes de module 1.

Dans la partie II, $\mathcal{P}$ désigne le plan complexe : c'est un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On identifiera le point m de $\mathcal{P}$, de coordonnées (x,y) et le nombre complexe $z = x + iy$ appelé affixe de m.

Nota Bene : aucun raisonnement vague ne sera pris en considération ; en particulier tout argument concernant une borne supérieure ou inférieure devra être convenablement justifié.

PARTIE I

1) Justifier pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'existence du réel : $\mu(P) = \sup_{z \in U} |P(z)|$

et montrer que l'application $\mu : P \longrightarrow \mu(P)$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit : $\mu_n = \inf\{\mu(P) \ / \ P \in T_n\}$

(borne inférieure de l'ensemble des réels $\mu(P)$ lorsque P décrit T_n)
Démontrer que μ_n est strictement positif.

On pourra considérer l'application $N : \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{associe} \quad N(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

3)a. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer $\mu(X-\alpha)$.

b. Déterminer la valeur de μ_1.

4)a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \mu_n \leq 1$.

b. Montrer que pour tout couple d'entiers (p,q) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a : $\mu_{p+q} \leq \mu_p \cdot \mu_q$

c. La suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, comparer $\sup_{z \in U} |P(z)|$ et $\sup_{z \in U} |P(z^2)|$

b. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n complexes distincts ou confondus et $Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X-a_k)$.

Démontrer que : $\sup_{z \in U} |\prod_{k=1}^{n} (z-a_k^2)| \leq \mu^2(Q)$

(Pour cela, on pourra considérer le produit $Q(z).Q(-z)$).

c. En déduire la valeur de μ_n.

6)a. Soit $P \in T_n$: $P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.

Calculer pour $p \in \mathbb{N}$: $\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-ip\theta} \, d\theta$.

b. Retrouver la valeur de μ_n.

c. Déterminer les polynômes unitaires $P \in T_n$ tels que : $\mu(P) = \mu_n$.
(Pour cela, on prouvera qu'un tel polynôme P vérifie l'égalité :

$$\left| \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta \right|^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \ ).$$

PARTIE II

Soit n, un entier ≥ 2.
On désigne par $\mathcal{C}$, le cercle de centre O et de rayon 1 du plan $\mathcal{P}$ muni de la

.../...

norme euclidienne notée : $\|.\|$

Pour tout n-uplet $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ de points de $\mathcal{C}$, on pose :

$$p_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \| \overrightarrow{m_i m_j} \|$$

le produit étant étendu à tous les couples d'entiers (i,j) vérifiant : $1 \leq i < j \leq n$

1)a. Justifier l'existence de :

$$\pi_n = \sup \{ p_n(m_1, m_2, \ldots, m_n) \ / \ (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathcal{C}^n \}.$$

On définit alors : $d_n = (\pi_n)^{\frac{2}{n(n-1)}}$

b. Calculer d_2.

2) On veut calculer d_3.

On note $\mathcal{H}$, l'ensemble des triplets $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ de trois réels vérifiant :

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq 2\pi$$

a. Soit $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathcal{H}$ et m_1, m_2, m_3 les points de $\mathcal{C}$ d'affixes

respectives : $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$, $e^{i\theta_3}$.

Expliciter la fonction f :

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \longrightarrow f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \| \overrightarrow{m_1 m_2} \| . \| \overrightarrow{m_2 m_3} \| . \| \overrightarrow{m_3 m_1} \|$$

sous forme d'un produit où interviennent trois sinus.

Montrer que lorsque $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ décrit $\mathcal{H}$, f admet un maximum.

b. Montrer que pour rechercher le maximum de f sur $\mathcal{H}$, on peut imposer

$$\theta_1 = 0, \ 0 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi.$$

c. Déterminer alors le maximum de f sur $\mathcal{H}$. En déduire la valeur de d_3.

3) Soit $n \geq 2$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ le n-uplet des points d'affixes

respectives $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ avec : $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

a. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixé. Calculer le produit : $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (z_j - z_k)$

(Pour cela, on remarquera que $z_j - z_k$ est racine du polynôme $(X+z_k)^n - 1$).

b. En déduire que : $p_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = n^{\frac{n}{2}}$

PARTIE III

Le but de cette partie est de prouver que la suite $(d_n)_{n \geq 2}$ converge et de déterminer sa limite.

Dans cette partie, l'entier n reste ≥ 2.

1) Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n complexes, distincts ou confondus.

Pour $P \in T_{n-1}$, on considère le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont la $k^{\text{ième}}$ ligne, k variant de 1 à n, est :

$(1, z_k, z_k^2, \ldots, z_k^{n-2}, P(z_k))$.

Montrer que ce déterminant a une valeur indépendante du polynôme P décrivant T_{n-1}

On note alors : $V_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ cette valeur commune.

2) Si z_k est l'affixe du point m_k appartenant à $\mathcal{C}$, k variant de 1 à n, comparer : $V_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $p_n(m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

3) On conserve les notations des questions précédentes.

a. Soit $P \in T_{n-1}$. En développant le déterminant introduit au III 1) selon une colonne convenablement choisie, démontrer que :

$$| V_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) | \leq n . \pi_{n-1} . \mu(P)$$

b. En déduire une inégalité liant π_n, π_{n-1}, μ_{n-1} puis en utilisant la valeur de μ_{n-1}, trouvée au I, montrer que : $d_n \leq (n!)^{\frac{2}{n(n-1)}}$

c. En déduire la convergence et la limite de la suite $(d_n)_{n \geq 2}$. (Pour cela, on pourra utiliser le II 3)).

4)a. Justifier l'existence de n-1 complexes $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ de module 1 tels que :

$$| V_{n-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) | = \pi_{n-1}.$$

b. En considérant, pour $z \in U$, $V_n(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z)$ démontrer l'inégalité : $\pi_{n-1} \leq \pi_n$.

c. Retrouver ainsi à l'aide du III 3)b., la limite de la suite $(d_n)_{n \geq 2}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail